5. cvičení - teorie

TODO: značení pro gradient

Věta 20 (derivace složené funkce)**.** Nechť $r, s \in \mathbb{N}$ a nechť $G \subset \mathbb{R}^s, H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G), f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F : G \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\right), x \in G,$$

je třídy C^1 na G. Nechť $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci)**.** Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$ splňující:

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li tot y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x, \varphi(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, \varphi(x)\right)} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Poznámka. Vždy platí, že $\varphi(x_0) = y_0$ a $F\left(x, \varphi(x)\right) = 0$ na jistém okolí bodu x_0.

Věta 23 (o dvou implicitních funkcích)**.** Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme dvě funkce $F_1, F_2 : G \to \mathbb{R}$ splňující pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

(a) $F_1, F_2 \in C^k(G)$,

(b) $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$ a

(c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) \neq 0.$

Potom existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}^2$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje jediné $y \in V$ splňující $F_1(x, y) = 0 = F_2(x, y)$. Můžeme tedy reprezentovat $[y_1, y_2] = [\varphi(x), \psi(x)]$ pro nějaké funkce $\varphi, \psi \in C^k(U)$.

Poznámka. Obvykle dostaneme soustavu rovnic o proměnných x, y, u, v. Pak bod x_0 větě výše je z našeho zadání $[x_0, y_0]$ a bod y_0 je z naěeho zadání bod $[u_0, v_0]$. Vždy platí $\varphi(x_0, y_0) = u_0, \psi(x_0, y_0) = v_0$ a $F_1\left(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)\right) = 0$ na jistém okolí $[x_0, y_0]$.

Definice (gradient)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $g \in C^1(G)$. Pak

$$\nabla g(x) = \left(g'_{x_1}(x), \ldots, g'_{x_n}(x)\right), \quad x \in G.$$

Jde tedy o vektor parciálních derivací funkce g.

Definice (Tečná nadrovina)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G, f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je **tečná nadrovina** fe grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka (Prohození souřadnic)**.** Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y. (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování *(iii)* ve Větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako F
- spočteme parciální derivace F
- ověříme předpoklady Věty 22, resp. Věty 23
- dle Věty 22, resp. 23, spočteme φ', resp. φ', ψ' pomocí násl.
  - pomocí řetízkového pravidla
  - metodou: zderivuji rovnost $F(x, \varphi(x)) = 0$ podle příslušné proměnné, vyjádřím φ'
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Níže uvedené vzorce je potřeba u zkoušky odvodit!

Vzorec pro φ' (jedna implicitní funkce) (odvozen ve 4. cvičení dle Vět 22 a 20), φ a její derivace jsou v bodě x a F a její derivace v bodě $(x, \varphi(x))$

$$\varphi'' = -\frac{\left(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi'\right) \cdot F'_y - F'_x \cdot \left(F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi'\right)}{\left(F'_y\right)^2}$$

Poznámka. Pokud chceme, aby $x = \varphi(y)$, pak vzorec výše musíme upravit tak, že kde je F'_x bude F'_y a naopak.

Vzorce pro parciální derivace funkcí φ a ψ, přičemž funkce φ, ψ a jejich derivace jsou vyhodnoceny v bodě (x,y) a F_1, F_2 i jejich derivace v bodě $(x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y))$ (odvození níže)

$$\psi'_x = \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \quad \varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u}$$
$$\psi'_y = \frac{(F_2)'_y (F_1)'_u - (F_1)'_y (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \quad \varphi'_y = \frac{-(F_1)'_v \psi'_y - (F_1)'_y}{(F_1)'_u}$$

Získané vztahy odpovídají tomu, že (φ'_x, ψ'_x) je řešením soustavy dané maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)_x \end{array}\right)$$

a (φ'_y, ψ'_y) je řešením soustavy dané maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)_y \end{array}\right).$$

Matice výše (bez pravé strany) je přesně matice, jejíž determinant ověřujeme ve Větě 23.

Odvození vzorců derivací φ a ψ

Platí, že $F_1(x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y)) = 0 = F_2(x, y, \varphi(x,y), \psi(x,y))$. Rovnosti zderivujeme podle x, přičemž použijeme řetízkové pravidlo (Věta 20).

$$0 = \frac{\partial F_1}{\partial x} \overset{\text{V 20}}{=} (F_1)'_x + (F_1)'_u \cdot \varphi'_x + (F_1)'_v \cdot \psi'_x \qquad / \cdot (F_2)'_u$$
$$0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \overset{\text{V 20}}{=} (F_2)'_x + (F_2)'_u \cdot \varphi'_x + (F_2)'_v \cdot \psi'_x \qquad / \cdot (F_1)'_u$$

$$0 = (F_1)'_x (F_2)'_u + (F_1)'_u (F_2)'_u \cdot \varphi'_x + (F_1)'_v (F_2)'_u \cdot \psi'_x$$
$$0 = (F_2)'_x (F_1)'_u + (F_2)'_u (F_1)'_u \cdot \varphi'_x + (F_2)'_v (F_1)'_u \cdot \psi'_x$$

$$0 = (F_1)'_x (F_2)'_u - (F_2)'_x (F_1)'_u + (F_1)'_v (F_2)'_u \cdot \psi'_x - (F_2)'_v (F_1)'_u \cdot \psi'_x$$
$$\psi'_x = \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}$$

Navíc z úplně první rovnosti plyne, že $\varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u}$.

Analogicky se odvodí vztahy pro derivace podle y. Dostáváme tedy následující.

$$\psi'_x = \frac{(F_2)'_x (F_1)'_u - (F_1)'_x (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_x = \frac{-(F_1)'_v \psi'_x - (F_1)'_x}{(F_1)'_u}$$
$$\psi'_y = \frac{(F_2)'_y (F_1)'_u - (F_1)'_y (F_2)'_u}{(F_1)'_v (F_2)'_u - (F_2)'_v (F_1)'_u}, \varphi'_y = \frac{-(F_1)'_v \psi'_y - (F_1)'_y}{(F_1)'_u}$$